

Zur Frage der Massenstabilität der Elementarteilchen

Von HELMUT HÖNL

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg i. Brg.

(Z. Naturforschg. 2a, 537–549 [1947]; eingegangen am 10. Mai 1947)

Es wird die Mikrobewegung eines Pol-Dipol-Teilchens (Überlagerung eines Massenpols und eines Massendipols) unter dem Einfluß der Strahlungskraft untersucht. Es zeigt sich, daß hierbei sowohl Energie und Impuls als auch Impulsmoment abgestrahlt wird. In kinematischer Hinsicht besitzt der Vorgang Ähnlichkeit mit dem „Diracschen Paradoxon“, insofern auch hierbei eine Selbstbeschleunigung des Teilchens eintritt, der zufolge die Mikrogeschwindigkeit sich asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit nähert; in den Einzelheiten bestehen jedoch wesentliche Unterschiede gegenüber der Selbstbeschleunigung des Diracschen Punktelektrons. Es wird die Deutung vorgeschlagen und begründet, daß es sich bei dem Vorgang um die klassisch-korrespondenzmäßige Beschreibung nicht des stabilen Elektrons, sondern des spontanen Zerfalls eines schweren instabilen Teilchens vom Spin \hbar (des Mesons) handelt.

1. Problemstellung

Im Rahmen der Lorentz-Mieschen Theorie der Materie ist es bekanntlich möglich, aus den Feldgleichungen (im Maxwellschen oder in einem erweiterten Sinne) Rückschlüsse auf die Bewegungsgleichungen für die als Feldsingularitäten aufgefaßten Elementarteilchen zu ziehen. Bei der systematischen Verfolgung der damit gestellten Frage nach den möglichen Bewegungsgesetzen von Elementarteilchen stößt man jedoch, wie neuere Untersuchungen von Dirac¹, Wessel², v. Stueckelberg³ und Bopp⁴ gezeigt haben, nicht nur auf die bekannte Schwierigkeit einer divergierenden Selbstenergie bei ideal „punktförmig“ angenommener Ladung, sondern auch auf ein außerordentlich merkwürdiges kinematisches Verhalten, welches in der Rückwirkung des Feldes auf das Teilchen als „Strahlungskraft“ seinen Ursprung hat und in der Erfahrung keine Stütze zu finden scheint. Während sich die Schwierigkeit einer unendlichen Selbstenergie für punktförmige Teilchen nach Arbeiten verschiedener Autoren⁵ im Rahmen der klassischen Theorie beseitigen

läßt, scheint ein Ausweg aus den kinematischen Paradoxien zunächst um so weniger Aussicht auf Erfolg zu versprechen, als der Ausdruck für die Strahlungskraft von speziellen Annahmen über die Feldgesetze und die „Struktur“ der Elementarteilchen weitgehend unabhängig ist. In der Tat scheinen die Versuche, die genannte zweite Schwierigkeit zu überwinden, bisher recht künstlich und unseren gewöhnlichen Forderungen an eine physikalische Theorie — *Wahrung des Kausalprinzips und finite Auffassung der Struktur der Elementarteilchen* — zu widersprechen. — Die bisher unternommenen Versuche dieser Art gehen im wesentlichen nach zwei Richtungen.

Dirac nimmt an, daß außerhalb des klassisch gedachten punktförmigen Elektrons den Maxwellschen Gleichungen uneingeschränkte Gültigkeit zukommt. Durch geeigneten Ansatz für den am Orte des Elektrons singulären Energie-Impulstensor gelingt es Dirac, daß die Massenträgheit des Teilchens trotz der unendlich großen Eigenenergie des elektromagnetischen Feldes endlich wird (indem sich zwei unendlich große Beträge positiver und negativer Energie bis auf eine endliche Differenz gegenseitig kompensieren). Der mathematische Ausdruck für die Massenträgheit

¹ P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **167**, 148 [1938].

² W. Wessel, Ann. Physik (5) **43**, 565 [1943].

³ v. Stueckelberg, Helv. physica Acta **17**, 3 [1944].

⁴ F. Bopp, Ann. Physik (5), **42**, 572 [1943]; Z. Naturforschg. **1**, 53 [1946].

⁵ M. Born, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **143**, 410 [1933]; M. Born u. L. Infeld, ebenda **144**, 425 [1934]; **147**, 522 [1934]; **150**, 465 [1935]; P. A. M. Dirac¹; H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **112**, 65 [1939].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

des Elektrons bleibt nach Dirac jedoch noch unbestimmt. Die einfachste Annahme für das Trägheitsglied in den dynamischen Gleichungen ist wie in der gewöhnlichen relativistischen Massenpunktsmechanik μu_α , wenn μ die Ruhmasse und $u_\alpha = \frac{dz_\alpha}{ds}$ (Ableitung der Viererkoordinate z_α nach der Eigenzeit s) die Vierergeschwindigkeit des Elektrons bedeutet. Andererseits ergibt sich für die Strahlungskraft als Rückwirkung des Elektrons auf sich selbst in relativistischer Strenge der schon von v. Laue und Abraham abgeleitete Ausdruck⁶

$$S_\alpha = \frac{2e^2}{3c^3} \{u_\alpha + (\dot{u}^\nu \dot{u}_\nu) u_\alpha\}. \quad (1)$$

Höhere Ableitungen von u_α nach s als zweite treten wegen der Annahme der strengen Gültigkeit des Maxwell'schen Feldes außerhalb des Elektrons bei dem dissipativen Anteil der Strahlungsrückwirkung hierbei nicht auf (und könnten allenfalls in dem Trägheitsgliede vorkommen). Die Bewegungsgleichung für die „kräftefreie“ Bewegung

$$\mu \dot{u}_\alpha = S_\alpha \quad (2)$$

läßt sich dann vollständig integrieren und liefert das Ergebnis:

$$|\vec{u}| = \text{Sin}(e^{as} + b), \quad u_4 = \text{Cos}(e^{as} + b), \quad (3)$$

worin \vec{u} den räumlichen Anteil des Vierervektors der Geschwindigkeit,

$$u_4 = \frac{dz_4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(β = Teilchengeschwindigkeit/ c) seine Zeitkomponente, $a = \frac{3\mu c^3}{2e^2}$ und $b > 0$ eine Integrationskonstante bedeutet. Aus (3) wird das paradoxe Verhalten des kräftefrei bewegten Elektrons ersichtlich: die Bewegung des Elektrons ist „instabil“ in dem Sinne, daß die Geschwindigkeit auch bei Abwesenheit beschleunigender äußerer Felder stetig anwächst und asymptotisch die Licht-

geschwindigkeit erreicht; es ergibt sich ferner, daß das Anwachsen der Geschwindigkeit nach Maßgabe der Größe a paradoxerweise um so schneller stattfindet, je größer die Ruhmasse μ und je kleiner die Ladung e angenommen wird. — Um ein derartiges Verhalten des Elektrons, welches in der Erfahrung natürlich keine Bestätigung findet, auszuschließen, sieht sich Dirac zu der Annahme einer *finalen Endbedingung* genötigt, welche bewirken soll, daß „alle“ Elementarteilchen in solchen Wechselwirkungen miteinander stehen, daß am „Ende der Zeiten“ ($t \rightarrow \infty$) die Geschwindigkeiten sämtlicher Teilchen konstant werden ($u = \text{const}$ ist natürlich partikuläres, aber singuläres Integral der Bewegungsgln. (1) und (2)). Es liegt aber auf der Hand, daß die Einführung einer derartigen Bedingung, welche in neuer Gestalt den alten Laplaceschen Dämon wieder aufleben ließe, dem kausalen Denken in der Physik so sehr widerspricht, daß dieser Versuch wohl kaum als eine befriedigende Lösung des Problems angesehen werden kann.

In anderer Weise hat Bopp versucht, die im Auftreten des „Diracschen Paradoxons“ liegende Schwierigkeit zu beseitigen. Der Autor entwickelt zunächst (formal an Dirac anschließend) einen möglichst allgemeinen Rahmen für eine gegenüber Maxwell erweiterte Feldtheorie und stellt die Frage, wie diese Theorie beschaffen sein müsse, damit das Diracsche Paradoxon auf Grund des im einzelnen angebbaren Zusammenhanges zwischen Feldgleichungen und Bewegungsgleichungen für die Feldsingularitäten *nicht* auftreten kann. Die mathematische Durchführung dieses Gedankens wird ermöglicht durch systematische Entwicklung der allgemeinen Ausdrücke für die elektrodynamischen Potentiale (und die aus ihnen abgeleiteten Feldgrößen) der verallgemeinerten Theorie nach geeignet gewählten Entwicklungsparametern, wobei dann konsequenterweise auch die Bewegungsgleichungen unendlich viele Entwicklungsglieder enthalten müssen. Neben Trägheitsgliedern (von ungerader Ordnung in bezug auf die Ableitungen nach s) ergeben sich hierbei in fortschreitender Entwicklung dissipative Kräfte (von gerader Ordnung), deren erste Näherung (von zweiter Ordnung) der angegebene Ausdruck (1) für die Strahlungskraft ist. Die auf dem Umweg über eine derartige „Feldmechanik“ abgeleitete Bewegungsgleichung unendlich hoher Ordnung entspricht nun einem Teilchen mit

⁶ M. v. Laue, Ann. Physik 28, 436 [1909]; M. Abraham, Theorie der Elektrizität, 2. Bd. 2. Aufl. (1908), S. 387. — Die für den *vollständigen* Ausdruck für die Strahlungskraft kennzeichnende Eigenschaft ist $u^\alpha S_\alpha = 0$, auf die wir im folgenden zurückgreifen werden.

unendlich vielen Freiheitsgraden, und dieser Umstand erschwert nicht nur die mathematische Durchführung der Theorie, sondern scheint uns vor allem das physikalische Problem selbst weitgehend unbestimmt zu machen. Denn bei einer Bewegungsgleichung unendlich hoher Ordnung müßten zugleich unendlich viele Anfangsbedingungen vorgegeben sein, damit die Bewegungsgleichung zu eindeutigen Lösungen führt; andererseits würden aber die Anfangsbedingungen in denjenigen Fällen, wo eine Lösung überhaupt zu gewinnen ist, an sich schon ausreichen, um die Lösung (gemäß dem Taylorschen Entwicklungssatz) unabhängig von der Bewegungsgleichung anzugeben. Obwohl es nun, wie Stueckelberg gezeigt hat, möglich ist, die Differentialgleichung der Bewegung in eine (vermutlich in vielen Fällen) äquivalente, dem Kausalprinzip entsprechende integrale Form zu setzen und so der Diskussion zugänglich zu machen, um hieraus (nach Bopp) Bedingungen für das Nichteintreten des Diracschen Paradoxons zu erhalten, scheint die hier nötige Annahme unendlich vieler Freiheitsgrade doch in jedem Falle eine Schwierigkeit in sich zu enthalten, und es dürfte daher natürlicher sein, zunächst Modelle mit nur endlich vielen Freiheitsgraden zu betrachten.

Aus diesem Grunde soll im folgenden ein Modell mit nur *endlich vielen* Freiheitsgraden untersucht werden, und zwar von solcher Art, wie sie durch den *Spin* des Elektrons nahegelegt wird. Wir werden hierbei, wie beim Diracschen Modell des Punktelektrons, annehmen, daß die auf das Teilchen wirkende dissipative Strahlungskraft durch den relativistisch strengen Ausdruck (1) *ohne* höhere Näherungsglieder gegeben sein soll (was auf die Annahme hinausläuft, daß außerhalb des Teilchens die Maxwell'schen Gleichungen keine Abänderung erfahren sollen). Andererseits werden wir aber an Stelle des Trägheitsgliedes $\mu \ddot{u}_\alpha$ einen Ausdruck zu setzen haben, welcher dem Spin des Teilchens klassisch Rechnung trägt. Ein solcher ist von Papapetrou und dem Verf.^{7, 7a, 7b} schon früher angegeben und ausführlich diskutiert worden. Die hierbei zugrundegelegte einfachste modellmäßige Annahme besteht in der Vorstellung der Überlagerung eines Massenpols

und eines Massendipols („Pol-Dipol-Teilchen“); der zugehörige Energie-Impulsvektor (und ebenso Energietensor) läßt sich dann für ein ideal punktförmiges Teilchen ganz *unabhängig* von speziellen feldtheoretischen Deutungen angeben. Nimmt man in dem allgemeinen Ausdruck für den Energie-Impulsvektor die einfachst mögliche Spezialisierung vor, so läßt sich zeigen, daß schon hierbei die zeitlichen Schwankungen der mikromechanischen Veränderungen des Systems der von Schrödinger⁸ diskutierten „Zitterbewegung“ des quantenmechanischen Dirac-Elektrons in allen Einzelheiten genau korrespondieren⁹. — Wir werden somit die Bewegung eines Pol-Dipol-Teilchens unter dem Einfluß der Strahlungskraft (1) zu untersuchen haben.

Bei der Behandlung dieses Problems, das als Gegenbeispiel zum Diracschen Modell auch an sich Interesse beanspruchen darf, zeigt sich nun, daß das Diracsche Paradoxon dabei in abgeänderter Form wiederum auftritt. Eine vorurteilsfreie Beurteilung der besonderen hierbei auftretenden Verhältnisse, deren Diskussion in den folgenden Abschnitten durchgeführt werden soll, legt aber die Vermutung nahe, daß der Vorgang nicht die Bewegung des Elektrons, als vielmehr den Zerfall *eines schweren instabilen Teilchens*, vermutlich des *Mesons*, in ein geladenes Teilchen von wesentlich kleinerer Masse und in ein ungeladenes Teilchen (beim Mesonenzerfall also in Elektron und Neutrino) im Sinne des Korrespondenzprinzips darstellen dürfte. Sollte sich diese Auffassung bestätigen, so würde das zunächst so paradox erscheinende Diracsche Paradoxon einen guten physikalischen Grund besitzen. Wir versuchen demnach, das Diracsche Paradoxon nicht eigentlich auszuschließen, sondern nur im Zusammenhang mit dem Teilchenspin und der erfahrungsmäßigen Masseninstabilität der Materie, wie sie z. B. im Mesonenzerfall zum Ausdruck kommt, neu zu interpretieren. Es ist andererseits ohne weiteres verständlich, daß das Verhalten des klassisch korrespondierenden Ersatzmodells im Sinne des Korrespondenzprinzips nur bei entsprechender Interpretation das Verhalten der wirklichen Elementarteilchen hinsicht-

⁷ H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **112**, 512 [1939].

^{7a} H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **114**, 478 [1939].

^{7b} H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **116**, 154 [1940].

⁸ E. Schrödinger, S.-B. preuß. Akad. Wiss., Physik-math. Kl. **1930**, 418.

⁹ Vergl. ^{7b}, insbes. Abschn. 2 und 3.

lich einiger wesentlicher Züge wiedergeben kann¹⁰. Auf die Einzelheiten dieser Deutung werden wir im Schlußabschnitt 4 zurückkommen.

2. Ansatz und Durchführung der Rechnung

Wir legen unseren Überlegungen demgemäß eine Bewegungsgleichung

$$\frac{d\Pi_\alpha}{ds} = S_\alpha \quad (4)$$

zugrunde, worin der Energie-Impulsvektor Π_α durch

$$\Pi_\alpha = m u_\alpha - 2 (\dot{p}^\nu u_\nu) u_\alpha + \dot{p}_\alpha \quad (5)$$

mit der Nebenbedingung

$$p_\alpha \dot{u}_\beta - p_\beta \dot{u}_\alpha = 0 \quad (6)$$

gegeben sein soll¹¹. Die Einführung des Vierervektors p_α (Massen-Dipolmoment) neben dem Galileischen Trägheitsglied $m u_\alpha$ (m = Massen-Unipol) kennzeichnet die *innere Struktur* des Teilchens und bewirkt, daß dieses auch bei Wegfall äußerer oder innerer Kräfte ($S_\alpha = 0$) keine einfache Galileische Trägheitsbewegung ausführt. Weiterhin soll m als von s unabhängig angenommen werden. Die Bewegungsgleichungen (4),

¹⁰ Hiermit soll natürlich nicht gesagt sein, daß sich bei der notwendigen Unvollkommenheit des klassischen Modells nicht Modelle ausfindig machen lassen, welche dem quantentheoretischen Verhalten der Elementarteilchen noch näherkommen als das vorgeschlagene Ersatzmodell. Das Ausfindigmachen derartiger Modelle ist in jedem Falle eine lohnende Aufgabe im Hinblick auf die heuristische Bedeutung des Modells.

¹¹ Vergl. ⁷ Gln. (45) und (46).

^{11a} Einer freundlichen Mitteilung von Hrn. F. Bopp verdanke ich den Nachweis, daß sich der zu den Ansätzen (5) und (6) gehörige Energie-Impulstensor $T_{\alpha\beta}$ für das punktförmig angenommene Pol-Dipol-Teilchen in Anlehnung an Dirac¹ folgendermaßen darstellen läßt:

$$T_{\alpha\beta} = \int \left\{ m_{\alpha\beta}(s) + m_{\gamma, \alpha\beta}(s) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \right\} \delta(x - z) ds; \quad (a)$$

hierin bedeutet x_α den Vierervektor von einem beliebigen Ausgangspunkt zum Aufpunkt, $z_\alpha(s)$ wie bisher den zum Teilchenort; $m_{\alpha\beta}$ und $m_{\gamma, \alpha\beta}$ sind die von der Eigenzeit s abhängigen, in α, β symmetrischen Uni- und Dipoltensoren und

$$\delta(x - z) \equiv \delta(x_1 - z_1) \cdot \delta(x_2 - z_2) \cdot \delta(x_3 - z_3) \cdot \delta(x_4 - z_4)$$

(5) und (6) entsprechen der einfachst möglichen Spezialisierung eines Teilchens vom Pol-Dipol-Charakter. Die Nebenbedingung (6) besagt Parallelität der Vierervektoren p_α und \dot{u}_α und kann durch den Ansatz

$$p_\alpha = \lambda \dot{u}_\alpha \quad (7)$$

ersetzt werden, worin $\lambda = \lambda(s)$ eine zu bestimmende Funktion der Eigenzeit s ist^{11a}.

Bei den folgenden Rechnungen wollen wir die räumlichen Komponenten der Vierervektoren je als imaginär, die Zeitkomponente als reell voraussetzen und insbesondere die Welt-Koordinate z_α in der Form

$$z_\alpha = (i x, i y, i z, c t)$$

annehmen, so daß das Element der Eigenzeit

$$ds = \sqrt{dx^\alpha dx_\alpha} = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot c dt \quad (8)$$

für ein zeitartiges Weltelement reell wird. Entsprechend erhalten die Vierervektoren u_α und Π_α die Bedeutung

$$u_\alpha = \frac{dz_\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (i \beta_x, i \beta_y, i \beta_z, 1), \quad (9)$$

bzw.

$$\Pi_\alpha = \frac{1}{c} \left(i P_x, i P_y, i P_z, \frac{E}{c} \right), \quad (10)$$

ist die vierfache raumzeitliche δ -Funktion. Die Integration nach s bewirkt, daß $T_{\alpha\beta}$ nur auf der Weltlinie des Teilchens von 0 verschieden ist und dort einen der Überlagerung eines pol- und dipolartigen Bestandteiles in (a) entsprechenden singulären Charakter annimmt. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der Forderung

$$\frac{\partial (T_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} = 0, \quad (b)$$

worin $S_{\alpha\beta}$ den Maxwellischen Spannungstensor des elektromagnetischen Feldes bedeutet. (Die Anwendung der Divergenzbedingung (b) auf die Weltlinie eines „punktförmigen“ Teilchens erfordert natürlich einige Vorsicht.) — Die oben genannte Spezialisierung besteht darin, daß ein in der allgemeinen Darstellung von $m_{\gamma, \alpha\beta}$ (Lubarski) auftretender antisymmetrischer Tensor als verschwindend und zugleich $m = \text{const}$ angenommen wird; letztere Festsetzung ist im allgemeinen durch die aus $u^\alpha S_\alpha = 0$ hervorgehende Bedingung

$$\dot{m} + \frac{1}{2} \lambda \frac{d}{ds} (\dot{u}^\nu \dot{u}_\nu) = 0 \quad (c)$$

zu ersetzen.

wenn $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ die auf die Lichtgeschwindigkeit c bezogenen Geschwindigkeits-, P_x, P_y, P_z die Impulskomponenten und E die Energie bedeuten; nach (9) gilt die Normierung $u^\alpha u_\alpha = +1$.

Die Bewegungsgleichungen (4), (5), (6) bzw. (7) haben nun das allgemeine Integral

$$\dot{u}^\nu \dot{u}_\nu = -\kappa \quad (\kappa = \text{const} > 0) \quad (11)$$

zur Folge, wie wir sogleich nachweisen. Gl. (11) läßt sich auch in die Form

$$\frac{(u_4^2 - 1)^2}{\varrho^2} + \frac{\dot{u}_4^2}{u_4^2 - 1} = \kappa \quad (12)$$

umsetzen, wenn ϱ den Krümmungsradius der Bahn des Teilchens bezeichnet; in der Gestalt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{u_4^2 - 1} \sqrt{\kappa - \frac{\dot{u}_4^2}{u_4^2 - 1}} \quad (12a)$$

liefert diese Beziehung die geometrischen Verhältnisse der Bahn (Krümmung), wenn der kinematische Ablauf, d. h. u_4 als Funktion von s bekannt ist.

Zum Beweise von (11) beachten wir zunächst, daß $S^\alpha u_\alpha = 0$ ist, vergl. (1), wie man unmittelbar durch zweimalige Differentiation von $u^\alpha u_\alpha = 1$ bestätigt. Aus (4) folgt daher

$$u^\alpha \frac{d\Pi_\alpha}{ds} = 0. \quad (13)$$

Setzen wir hierin Π_α gemäß (5) ein und berücksichtigen die aus (7) und $u^\alpha p_\alpha = 0$ hervorgehenden Beziehungen

$$u^\alpha \dot{p}_\alpha = -\dot{u}^\alpha p_\alpha = -\lambda (\dot{u}^\alpha \dot{u}_\alpha) \quad (14a)$$

und

$$\begin{aligned} u^\alpha \ddot{p}_\alpha &= -(2\dot{u}^\alpha \dot{p}_\alpha + \ddot{u}^\alpha p_\alpha) \\ &= -2\dot{\lambda} (\dot{u}^\alpha \dot{u}_\alpha) - \frac{3}{2}\lambda \frac{d}{ds} (\dot{u}^\alpha \dot{u}_\alpha), \end{aligned} \quad (14b)$$

so ergibt sich aus (13)

$$\begin{aligned} u^\alpha \frac{d\Pi_\alpha}{ds} &= 2 \frac{d}{ds} \{ \lambda (\dot{u}^\nu \dot{u}_\nu) u^\alpha \} \cdot u_\alpha + u^\alpha \ddot{p}_\alpha \\ &= \frac{\lambda}{2} \frac{d}{ds} (\dot{u}^\nu \dot{u}_\nu) = 0, \end{aligned}$$

woraus unsere Behauptung hervorgeht. Berechnen wir andererseits $\dot{u}^\nu \dot{u}_\nu$ durch Eintragen der durch Differentiation von (9) hervorgehenden Be-

ziehungen, so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \dot{u}^\nu \dot{u}_\nu &= -u_4^2 \sum_{k=x,y,z} \beta_k^2 - 2u_4 \dot{u}_4 \sum_{k=x,y,z} \beta_k \dot{\beta}_k \\ &\quad + (1 - \beta^2) \dot{u}_4^2 = -\kappa. \end{aligned} \quad (15)$$

Zerlegt man weiterhin die im gewöhnlichen (dreidimensionalen) Sinne definierte Beschleunigung in eine zur Bahn tangentiale und eine normale Komponente, so bestätigt man ferner leicht

$$\sum_k \dot{\beta}_k^2 = \dot{\beta}^2 + \frac{\beta^2 \dot{u}_4^2}{\varrho^2}, \quad \sum_k \beta_k \dot{\beta}_k = \beta \dot{\beta}$$

(ϱ Krümmungsradius der Bahn); bei Einsetzen dieser Ausdrücke in (15) folgt dann nach einfacher Rechnung mit Rücksicht auf den Zusammenhang von u_4 und β , vergl. (9), das Ergebnis (12).

Mit Hilfe des Integrals (11) läßt sich nunmehr die Bewegungsgleichung (4) in einem weiteren Schritte integrieren. Ersetzen wir in (1) $\dot{u}^\nu \dot{u}_\nu$ durch $-\kappa$, so wird mit der Abkürzung $\gamma = \frac{2e^2}{3c^3}$

$$\frac{d\Pi_\alpha}{ds} = \gamma (\ddot{u}_\alpha - \kappa u_\alpha) \quad (16)$$

und integriert

$$\Pi_\alpha = \gamma \{ (\dot{u}_\alpha - \dot{u}_\alpha^0) - \kappa (z_\alpha - z_\alpha^0) \} + \Pi_\alpha^0, \quad (17)$$

worin z_α^0 und \dot{u}_α^0 die Anfangswerte von z_α und u_α für $t=0$ bedeuten mögen und die Π_α^0 Integrationskonstanten sind. Denken wir uns die Strahlungskraft S_α nur für $t \geq 0$ wirksam (für $t < 0$ sei $S_\alpha = 0$), so sind die Π_α^0 übereinstimmend mit den konstanten Werten der Komponenten des Vierervektors Π_α für das „ungestörte“ Teilchen. Setzen wir dieses hier wie im folgenden als „makroskopisch ruhend“, d. h. mit verschwindendem Impuls voraus, so haben wir

$$\Pi_\alpha^0 = (0, 0, 0, \mu_0) \quad (18)$$

mit μ_0 als (anfänglicher) Ruhmasse des Teilchens.

Wie wir früher dargelegt haben¹², führt das makroskopisch ruhende Teilchen kinematisch eine innere Kreisbewegung aus, ohne daß hierdurch ein makroskopischer Impuls in Erscheinung tritt. Impuls und Geschwindigkeit sind hierbei in ähn-

¹² Vergl. 7, S. 525 ff.

licher Weise wie beim Diracschen quantenmechanischen Elektron als weitgehend entkoppelt anzusehen. Unsere weitere Aufgabe soll nun, da eine strenge Integration der Bewegungsgleichungen nicht möglich erscheint, darin bestehen, von der Kreisbahn als Anfangsbewegung ausgehend, den weiteren Ablauf der inneren Bewegung in großen Zügen zu ermitteln¹³.

Betrachten wir speziell die *Energie* des Systems, so ist nach (17) und (18)

$$E = c^2 \Pi_4 = \mu_0 c^2 + \frac{2e^2}{3c^3} (-\kappa \cdot ct + \dot{u}_4 - \dot{u}_4^0). \quad (19)$$

Man entnimmt aus (19) unmittelbar, daß die Energie des Teilchens, wie zu erwarten, infolge der Einwirkung des Strahlungsfeldes zunächst, d. h. unmittelbar nach „Einschaltung“ der Strahlungskraft, abnimmt, daß also Energie *abgestrahlt* wird. Der weitere zeitliche Verlauf der Energieänderung ist aber erst dann eindeutig bestimmt, wenn u_4 als Funktion von s (bzw. t) ermittelt ist. — Physikalisch ist die Annahme am natürlichsten — wenn auch, wie das Diracsche Paradoxon zeigt, keineswegs selbstverständlich —, daß auch für alle späteren Zeiten Energie-*Abnahme* infolge Ausstrahlung stattfindet. Es kann sich dann nur noch darum handeln, ob die (ursprünglich positive) Energie $\mu_0 c^2$ allmählich zu negativen Werten übergeht oder ob sie asymptotisch einem Grenzwert $E_\infty \geq 0$ zustrebt (unsere Formeln gestatten zunächst keine Entscheidung hierüber). Schließen wir die erstere Möglichkeit vorläufig als unwahrscheinlich aus — den Nachweis der Unmöglichkeit der ersteren Annahme werden wir im folgenden Abschn. 3 erbringen —, so erhalten wir aus (16) als notwendige Bedingung für $E \rightarrow E_\infty \geq 0$:

$$\frac{d\Pi_4}{ds} = \gamma (\ddot{u}_4 - \kappa u_4) \rightarrow 0 \quad (20)$$

und daher asymptotisch (die Lösung mit negativen Exponenten ist physikalisch sinnlos):

$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sim e^{+\sqrt{\kappa} s} \quad (21)$$

¹³ Die anfängliche Ruhenergie $\mu_0 c^2$ des Teilchens hängt natürlich von den Parametern der Kreisbewegung ab; wir brauchen indessen auf die besondere Art dieser Abhängigkeit im folgenden nicht im einzelnen einzugehen.

¹⁴ Man vergl. hierzu den Schlußabsatz von Abschn. 4.

Die Geschwindigkeit des Teilchens wird also ähnlich wie beim Diracschen Paradoxon asymptotisch Lichtgeschwindigkeit erreichen. Im einzelnen bestehen aber gegenüber Dirac sehr erhebliche Unterschiede, auf deren Diskussion wir im Schlußabschnitt eingehen werden.

Was den *Bewegungsablauf* betrifft, so finden wir aus (12a), daß die Krümmung der Bahn mit wachsender „Mikrogeschwindigkeit“ abnimmt und nach (21) asymptotisch wenigstens¹⁴ wie $e^{-3\sqrt{\kappa} s}$ verschwindet. Hieraus dürfen wir den Schluß ziehen, daß die Bahn des Teilchens in ihren inneren Teilen mit einer sich aufwickelnden Spirale vergleichbar ist und wegen des exponentiellen Ab-

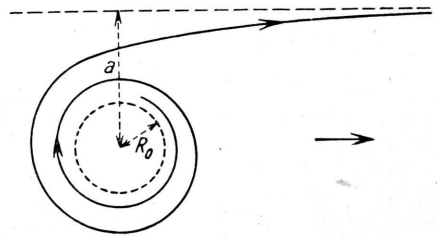


Abb. 1. Mikrobewegung des Pol-Dipol-Teilchens bei Berücksichtigung der Strahlungskraft. Zugleich Modell des Mesonenzersfalls. Der Pfeil deutet den vom umgebenden Feld aufgenommenen Impuls an (vergl. Abschn. 3).

nehmens der Bahnkrümmung sich schließlich asymptotisch einer Geraden nähert. Die Bahnkurve hat daher die in Abb. 1 angedeutete ungefährige Gestalt: sie wird von innen durch die anfängliche Kreisbahn, nach außen durch eine Gerade asymptotisch begrenzt¹⁵.

Die Abnahme der *Ruhmasse* infolge des Ausstrahlungsvorganges sowie die Energieverhältnisse im asymptotischen Grenzfall $s \rightarrow \infty$ erfordern eine besondere Diskussion, die wir noch zurückstellen (Abschnitt 3).

¹⁵ Diese Gestalt der Bahnkurve wird durch Betrachtung des Impulsvektors $\vec{\Pi}$ (räumlicher Anteil von Π_a) weiter erhärtet. Aus (17) ergibt sich für diesen in asymptotischer Annäherung

$$|\vec{\Pi}| \rightarrow \gamma |\vec{u} - \kappa \vec{z}|;$$

würden wir im Gegensatz zu Abb. 1 annehmen, daß die Bahnkurve (nach Art einer archimedischen oder logarithmischen Spirale) *nicht* in eine Gerade ausläuft, so ergibt sich nach (12a) und (21) leicht, daß $|\vec{\Pi}| \rightarrow \infty$ anwachsen müßte, während wir im folgenden nachweisen werden, daß $|\vec{\Pi}|$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt.

Da eine strenge Integration der dynamischen Bewegungsgleichungen unmöglich erscheint, wollen wir im folgenden noch eine Prüfung unserer Annahme (21) und der aus ihr entwickelten Folgerungen auf einem unabhängigen Wege andeuten. Wir finden zunächst, indem wir (5) in (17) einsetzen, mit u^α multiplizieren (und addieren) sowie (11) und (14a) berücksichtigen:

$$m - \kappa \lambda + \gamma \kappa \cdot u^\alpha z_\alpha + \gamma u^\alpha (\dot{u}_\alpha^0 - \kappa z_\alpha^0) = u^\alpha \Pi_\alpha^0; \quad (22)$$

die rechte Seite reduziert sich bei den angenommenen Werten (18) für Π_α^0 (Ruhsystem) auf $\mu_0 u_4$. Da wir nun nach dem Vorhergehenden annehmen dürfen, daß das asymptotische Verhalten des Teilchens nicht wesentlich von dem Werte von γ abhängen wird, dürfen wir in (23) im Grenzfall $s \rightarrow \infty$ zum Limes $\gamma \rightarrow 0$ (Ladung $e \rightarrow 0$) übergehen und erhalten dann aus (22)

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\mu_0}{\kappa} (u_4 - u_4^0), \quad \dot{\lambda} = -\frac{\mu_0}{\kappa} \dot{u}_4, \quad (23)$$

wenn

$$\lambda_0 = \frac{1}{\kappa} (m - \mu_0 u_4^0) \quad (23a)$$

den Anfangswert von λ bedeutet. Setzen wir diesen Näherungswert für λ in (5) mit $\alpha = 4$ ein, so ergibt Gleichsetzung von (5) und (17) (wir lassen die Glieder mit γ hierbei zweckmäßig stehen):

$$\begin{aligned} & \{m - 2\kappa\lambda_0 + 2\mu_0(u_4 - u_4^0)\} \dot{u}_4 - \left(\frac{\mu_0}{\kappa} \dot{u}_4 + \gamma\right) \dot{u}_4 \\ & + \left\{\lambda_0 - \frac{\mu_0}{\kappa} (u_4 - u_4^0)\right\} \ddot{u}_4 + \gamma \kappa \int_0^s u_4 ds \\ & = -\gamma u_4^0 + \mu_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Durch diese Gleichung wird u_4 als Funktion von s und damit nach (23) auch λ als Funktion von s näherungsweise bestimmt. Indem wir für hinreichend große Werte von u_4 , \dot{u}_4 und \ddot{u}_4 nur die in diesen Größen quadratischen Glieder (proportional μ_0) beibehalten, erhalten wir aus (24)

$$2\kappa u_4^2 - \dot{u}_4^2 - u_4 \dot{u}_4 = 0, \quad (25)$$

woraus ein asymptotisches Verhalten von u_4 in Übereinstimmung mit (21) hervorgeht. Wir können hieraus dann weiter auf $\frac{d\Pi_4}{ds} \rightarrow 0$ schließen,

was, wie wir sahen, eine notwendige (wenn auch nicht hinreichende) Bedingung für einen endlichen Grenzwert der Energie darstellt.

Durch diese Betrachtungen wird die Eindeutigkeit des im Vorangehenden beschriebenen Verhaltens unseres Teilchens allerdings noch nicht in Strenge gewährleistet. Wenn wir den Mangel eines strikten Beweises der Eindeutigkeit der asymptotischen Lösung wegen der Schwierigkeiten der strengen Integration der Bewegungsgleichungen auch vorläufig in Kauf nehmen müssen, so dürfte doch jedenfalls gezeigt sein, daß die verschiedenen Züge des Bildes miteinander in Einklang sind, und es scheint das angenommene Verhalten überdies das physikalisch natürlichste zu sein. Dieser Eindruck wird durch die folgenden ergänzenden Überlegungen zu dem asymptotischen Verhalten der Lösung noch verstärkt.

3. Asymptotisches Verhalten der Lösung

Herrn F. Bopp verdanke ich die Kenntnis einer *strengen* Lösung der Bewegungsgleichungen (4), (5) und (7) des Pol-Dipol-Teilchens, welche, wie wir zeigen, zugleich das *asymptotische* Verhalten des im Vorstehenden behandelten Problems darstellt. Diese Lösung dürfte außerdem als ein weiteres Gegenstück zum instabilen Diracschen Punktelektron Interesse besitzen. — Sei κ wie bisher die Konstante des Integrals (11) (und somit $m = \text{const}$), so lautet die Lösung (Bewegung in der z -Richtung):

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = i \operatorname{Sin} \sqrt{\kappa} (s - s_0), \\ u_4 = \operatorname{Co} \sqrt{\kappa} (s - s_0), \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

$$\lambda = \frac{m}{\kappa} - a \operatorname{Co} \sqrt{\kappa} (s - s_0) + b \operatorname{Sin} \sqrt{\kappa} (s - s_0) \quad (26b)$$

mit a , b und s_0 als Integrationskonstanten; hiernach ist weiter

$$\Pi_1 = \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = i\kappa b, \quad \Pi_4 = \kappa a \quad (26c)$$

und

$$\Pi^\alpha \Pi_\alpha = \kappa^2 (a^2 - b^2) = \mu^2 \quad (26d)$$

ebenfalls konstant. Die Strahlungskraft S_α verschwindet nach (3), (11) und (26a) offenbar für die dargestellte Bewegung, und es ist somit unmittelbar verständlich, daß sich Energie und Impuls nach (26c) als konstant ergeben.

Die Bewegung als solche ist jedoch außerordentlich merkwürdig. Überraschenderweise geht m (Polmasse) weder in die kinematischen Größen u_α noch in den Energie-Impulsvektor Π_α ein, sondern nur in λ , während andererseits die u_α nach (26a) auch von a und b unabhängig sind. Die Bewegung erfolgt also derart, daß sich das Teilchen, aus dem Unendlichen kommend, mit abnehmender Geschwindigkeit bewegt, sodann umkehrt und sich mit zunehmender Geschwindigkeit wieder ins Unendliche entfernt; für $s \rightarrow \pm \infty$ kommt die Teilchengeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit beliebig nahe.

Eine begriffliche Schwierigkeit scheint weiterhin die „effektive Masse“ (Eigenmasse oder Ruhmasse) des Systems zu enthalten. Die Definition der Eigenmasse μ durch $\Pi^\alpha \Pi_\alpha = \mu^2$ scheint zunächst nur für solche Teilchen legitim zu sein, deren Energie-Impulsvektor sich durch $\Pi_\alpha = \mu u_\alpha$ darstellen läßt, nicht aber für Teilchen von komplizierterer innerer Struktur wie das Pol-Dipol-Teilchen. Man erhält in der Tat einen Widerspruch, wenn man die Eigen- oder Ruhmasse andererseits in sonst üblicher Weise durch Π_3/u_3 oder Π_4/u_4 zu definieren versucht, wobei sich für μ verschiedene Abhängigkeiten von s ergeben, aber kein konstanter Wert wie nach (26d). Die Widersprüche lösen sich indessen, wenn man auch hier, wie wir es früher schon getan haben¹⁶, zwischen Mikro- und Makrobewegung des Systems unterscheidet. — Eine zweifelsfreie Definition der effektiven Masse läßt sich bei allen denjenigen Systemen durchführen, bei denen sich ein raumzeitliches Koordinatensystem angeben läßt, in welchem das Teilchen „makroskopisch“ ruht; die effektive Masse wird dann durch die Ruhenergie des Systems definiert („Ruhmasse“ μ_0). Das ist jedenfalls möglich bei dem a.a.O. untersuchten makroskopisch ruhenden Pol-Dipol-Teilchen (ohne Strahlungskraft). Eine einfach durchzuführende

¹⁶ Vergl. 7, S. 525 ff.

¹⁷ Man erhält zunächst allgemein:

$$\Pi^\alpha \Pi_\alpha = m(m + 2\lambda Q) + \dot{\lambda}(\lambda Q) + \lambda^2 R \quad (a)$$

mit den vorübergehenden Abkürzungen $Q = \dot{u}^\nu \dot{u}_\nu$, $R = \ddot{u}^\nu \ddot{u}_\nu$, wobei das zweite Glied wegen $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{Q} = 0$ für das ungestörte Pol-Dipol-Teilchen weiterhin entfällt. Die Berechnung von (a) läßt sich nun für die in 7, S. 525 ff., angegebene Lösung vom Kreisbahntypus leicht durchführen; man findet mit den dort angegebenen Bezeichnungen:

Rechnung¹⁷ führt hier zu dem Ergebnis, daß sich die durch $\Pi^\alpha \Pi_\alpha = \mu_{\text{eff}}^2$ und durch die Ruhenergie $E_0 = \mu_0 c^2$ definierten Massen als identisch erweisen, also

$$\Pi^\alpha \Pi_\alpha = \mu_{\text{eff}}^2 = \left(\frac{E_0}{c^2} \right)^2. \quad (27)$$

Diese Übereinstimmung rechtfertigt u. E. die Auffassung, daß es sinnvoll ist, auch in den Fällen, wo — wie im vorliegenden Bopp'schen Beispiel — es nicht ohne weiteres möglich ist, den Begriff einer invarianten Eigenmasse auf die Ruhenergie des Systems zurückzuführen, diese Größe als durch den invarianten Skalar $\Pi^\alpha \Pi_\alpha$ definiert anzusehen. In der Tat ist diese Größe die *einzig* Invariante, welche in Spezialfällen (wie das Beispiel des makroskopisch ruhenden Pol-Dipol-Teilchens ohne Strahlungskraft zeigt) die Gleichsetzung mit der in üblicher Weise aus der Ruhenergie definierten Eigenmasse zuläßt. Wir werden daher auch weiterhin die effektive Masse des durch die Gln. (26a bis c) definierten Systems als durch (26d) gegeben ansehen.

Man wird nunmehr umgekehrt wie oben die „Makrogeschwindigkeit“ U_α des Systems durch Π_α/μ zu definieren haben; aus (26c) und (26d) folgt somit:

$$U_1 = U_2 = 0, \quad U_3 = i \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad U_4 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \\ (U^\alpha U_\alpha = 1). \quad (28)$$

Die Makrogeschwindigkeit ist also konstant und das Überraschende besteht nur darin, daß sich Makro- und Mikrogeschwindigkeit, wie der Vergleich von (26a) und (28) zeigt, beliebig voneinander emanzipieren können. Indessen ist ein derartiges Verhalten bei einem System, bei welchem der Schwerpunkt stets außerhalb des

$$\lambda Q = -m', \quad \lambda^2 R = -m'^2 \frac{1}{\beta^2 u_4^2} \left(u_4^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \right)$$

und weiter, mit Rücksicht auf die Doppelgleichung (53) für die Ruhmasse μ_0

$$\mu_0 = (m - 2m') u_4 = \frac{m - m'}{u_4}, \quad (b)$$

$$\Pi^\alpha \Pi_\alpha = m(m - 2m') + \lambda^2 R \\ = \left(\frac{m - m'}{u_4} \right)^2 = \mu_0^2, \quad (c)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (27) des Textes.

Teilchenortes liegt¹⁸, keineswegs unvernünftig. Die Makrogeschwindigkeit kann im Sonderfall $|a| = |b|$ die Lichtgeschwindigkeit erreichen, d. h. nach (26d): wenn die Ruhmasse verschwindet.

Da die Strahlungskraft am Teilchen keine Arbeit leistet, so erfolgt die Schwerpunktsbewegung gleichförmig-translatorisch und die Energie des Teilchens ist konstant. Im Gegensatz dazu wächst beim Diracschen Punktelektron (s. Abschn. 1) die Energie bei ebenfalls konstanter Ruhenergie beständig an, im Einklang damit, daß, wie die Nachrechnung zeigt, die Strahlungskraft stets positive Arbeit am Teilchen leistet. Es ergibt sich daher beim Dirac-Teilchen keine Ausstrahlung, sondern im Gegenteil Energieaufnahme („negative“ Ausstrahlung); die Herkunft dieser ständigen Energiezufuhr dürfte erst eine detaillierte Untersuchung des Strahlungsfeldes ergeben, welche bisher jedoch nicht vollständig durchgeführt zu sein scheint.

Die Annahme, daß die Lösung (26) den asymptotischen Grenzfall des in Abschn. 2 behandelten Pol-Dipol-Teilchens mit Ausstrahlung für $s \rightarrow +\infty$ darstellt, liegt unmittelbar auf der Hand: auch hier bewegt sich das Teilchen asymptotisch geradlinig, wobei u_4 ebenso wie nach (26a) gemäß einem Exponentialgesetz $\sim e^{\sqrt{\kappa} s}$ anwächst, während die Strahlungskraft S_a asymptotisch verschwindet. Die Anwendung der vorstehenden Überlegungen auf das infolge Ausstrahlung instabile Pol-Dipol-Teilchen beleuchtet dieses Problem aber noch von einer neuen Seite. Zunächst wäre der naheliegende Schluß, daß die Ruhmasse des Teilchens asymptotisch zu Null abnehmen müsse (da nämlich die Energie sich einem konstanten Grenzwert nähert, während die Teilchengeschwindigkeit gegen c anwächst), keineswegs gerechtfertigt. Unser Beispiel zeigt vielmehr, daß die asymptotisch erreichte effektive Masse μ_∞ noch von den Konstanten a und b der asymptotischen Lösung gemäß (26d) abhängt. Zieht man (23), (23a) zum Vergleich mit (26b) und (26d) heran, so ergibt sich

$$\kappa(a - b) = \mu_0, \quad \kappa\sqrt{a^2 - b^2} = \mu_\infty; \quad (29)$$

aus diesen Beziehungen könnte a und b aus μ_0

und μ_∞ im Prinzip berechnet werden. Es ist aber zu beachten, daß die erste der Gln. (29) ebenso wie (23) nur approximative Gültigkeit besitzt¹⁹. Immerhin dürfte die folgende Vorzeichenbestimmung das Richtige treffen: Da nach Voraussetzung $\mu_0 = E/c^2 = \kappa(a - b) > 0$ und da, damit μ_∞ reell bleibt, jedenfalls $|b| < |a|$ sein muß, so ist jedenfalls a positiv; es ist daher nach (26c) auch $E_\infty = c^2 \kappa \cdot a > 0$. Dies besagt also, daß bei vorausgesetzter positiver Anfangsenergie des Teilchens ein Übergang zu negativer Endenergie infolge Ausstrahlung nicht möglich ist (was nach den Überlegungen von Abschn. 2 noch offen blieb). Die effektive Masse μ_∞ ist andererseits stets ≥ 0 .

Betrachten wir noch speziell den Grenzfall $\mu_\infty = 0$, so kann hierfür nur $b = -a$ zulässig sein, da für $b = +a$ nach (26b) λ asymptotisch konstant würde, während wir nach (23) ein exponentielles Anwachsen mit s zu erwarten haben. Wir erhalten für diesen Grenzfall aus (29) das im übrigen annehmbare Resultat:

$$E_0 = \mu_0 c^2 = 2 \kappa c^2 \cdot a, \\ E_\infty = \frac{1}{2} E_0 = \kappa c^2 \cdot a, \quad \mu_\infty = 0. \quad (30)$$

Der Impuls $P_\infty = \kappa c \cdot b = -\kappa c \cdot a$ ergibt sich hierbei asymptotisch als *entgegengesetzt* gerichtet der Teilchengeschwindigkeit²⁰.

Der Grenzwert für Energie und Impuls ist somit noch nicht eindeutig bestimmt und wird von den speziellen Bedingungen des Ausstrahlungsvorganges (speziell den Anfangsbedingungen: Dimension der Anfangsbahn und Mikrogeschwindigkeit auf dieser) abhängen. Wir können allgemein nur feststellen, daß die möglichen Fälle auch klassisch durch den Grenzfall gerichteter Ausstrahlung limitiert werden, bei welchem ein gerichteter Rückstoß (Nadelstrahlung) erfolgt; in diesem durch (30) dargestellten Grenzfall wird aus Gründen der Energie- und Impulserhaltung die Endenergie E_∞ gleich der halben Anfangsenergie E_0 , die andere Hälfte der Energie wird vom Strahlungsfeld aufgenommen; bei weniger einseitig gerichteter Ausstrahlung erfährt das Teilchen zunächst Impulsschwankungen; asymptotisch

¹⁸ Vergl. hierzu ^{7a}. Man beachte auch das exponentielle Anwachsen von λ nach (26b).

¹⁹ Wegen der Vernachlässigungen beim Übergang von (22) zu (23).

²⁰ Dem entspricht die Richtung des den „Strahlungsrückstoß“ darstellenden Pfeiles in Abb. 1, die man im Sinne der gewöhnlichen Mechanik der Punktmassen entgegengesetzt der Teilchengeschwindigkeit erwarten sollte.

tisch wird daher

$$P_\infty < \frac{1}{2} E_0/c \text{ sowie } E_\infty < \frac{1}{2} E_0 \text{ und } \mu_\infty > 0$$

sein.

Gerade der Umstand, daß im allgemeinen Falle $\mu_\infty > 0$ zu erwarten ist, dürfte für die Übertragung unserer klassisch-korrespondenzmäßigen Überlegungen in die Quantentheorie der Elementarteilchen von Bedeutung sein; er ermöglicht es, den klassisch beschriebenen Ausstrahlungsvorgang quantentheoretisch in den spontanen Zerfall eines schweren Teilchens in ein solches von geringerer, aber nicht notwendig verschwindender Eigenmasse umzudeuten (Mesonenzerfall).

4. Spinmoment

Wie a.O. ausführlich dargelegt worden ist²¹, besitzt das durch Π_α definierte Teilchen ein Eigenimpulsmoment (Spin), welches nach Größe und Richtung durch

$$\vec{J} = c [\vec{p}, \vec{u}] = c \lambda [\vec{u}, \vec{u}] \quad (31)$$

dargestellt wird²². Bei Addition zu dem im gewöhnlichen Sinne definierten Bahnimpulsmoment $[\vec{x}, \vec{\Pi}]$ ergibt sich aus (31) ein exaktes Integral der Bewegungsgleichungen für verschwindende äußere oder innere Kraft ($S_\alpha = 0$), welcher Umstand es erst rechtfertigt, die Größe (31) als Eigenimpulsmoment des Teilchens aufzufassen. Die bei der kräftefreien translatorischen Bewegung des Teilchenschwerpunktes auftretenden Schwankungen von \vec{J} sind nach Größe und Richtung in genauer korrespondenzmäßiger Übereinstimmung mit den von Schrödinger⁸ diskutierten Erwartungswerten für die entsprechenden Operatoren des Dirac-Elektrons^{7b}.

Wir fragen, welche Änderungen der Betrag J unter der Einwirkung der Strahlungskraft erfährt. Es genügt hierfür, J als Funktion der während des Bewegungsablaufs veränderlichen Größen darzustellen. Zu diesem Zwecke betrachten wir vorübergehend den Flächentensor (Sechser-

vektor)

$$m_{\alpha\beta} = \dot{u}_\alpha u_\beta - \dot{u}_\beta u_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 4), \quad (32)$$

dessen räumliche Komponenten bis auf den Faktor $-c\lambda$ mit den Komponenten von J übereinstimmen. Aus (32) ergibt sich mit Rücksicht auf $u^\alpha \dot{u}_\alpha = 0$ und (11) unmittelbar

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \sum_\beta m_{\alpha\beta}^2 &= \sum_\alpha \dot{u}_\alpha^2 \cdot \sum_\beta u_\beta^2 + \sum_\beta \dot{u}_\beta^2 \cdot \sum_\alpha u_\alpha^2 \\ &\quad - 2 \sum_\alpha \sum_\beta u_\alpha u_\beta \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta = -2\kappa. \end{aligned} \quad (33)$$

Andererseits haben wir

$$2J^2 = c^2 \lambda^2 \sum_i \sum_k m_{ik}^2 \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (34)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \sum_\alpha \sum_\beta &= \sum_i \sum_k + 2 \left\{ \dot{u}_4^2 \sum_1^3 u_k^2 + u_4^2 \sum_1^3 \dot{u}_k^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 u_4 \dot{u}_4 \sum_1^3 u_k \dot{u}_k \right\} \\ &= \sum_i \sum_k + 2 (\dot{u}_4^2 - \kappa u_4^2). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Somit aus (33), (34) und (35):

$$J^2 = c^2 \lambda^2 \{ \kappa (u_4^2 - 1) - \dot{u}_4^2 \}. \quad (36)$$

Der vorstehende exakte Ausdruck ist allerdings nicht geeignet, eine Vorstellung von der zeitlichen Änderung des Spinmoments zu vermitteln. Man würde bei Einsetzen von (21) und (23) in (36) vielleicht zunächst schließen, daß das Spinmoment unbegrenzt anwachsen müßte, was physikalisch schwerlich verständlich wäre. Indessen ergibt eine einfache Überlegung (s. u.), daß J jedenfalls endlich bleiben muß. Man wird daher umgekehrt schließen, daß, da λ gemäß (23) unbegrenzt zunimmt, der Klammernaussdruck in (36) in entsprechendem Maße gegen 0 abnimmt. Dies ergibt eine Verschärfung des asymptotischen Verhaltens [ohne daß hierdurch ein Widerspruch zu (21) entstände], und man kann z. B. aus (12a) entnehmen, daß sich die Bahn asymptotisch noch wesentlich schneller einer Geraden annähern muß, als oben (S. 542) abgeschätzt wurde. Auf eine nähere mathematische Ausführung dieses Gedankens kann verzichtet werden.

²¹ Vergl. 7, S. 534 ff., insbesondere Gl. (88).

²² Die durch einen Pfeil gekennzeichneten, schon benutzten Größen bezeichnen je die zu einem Vektor im dreidimensionalen Raume zusammengefaßten, reell genommenen räumlichen Komponenten des zugehörigen Vierervektors.

Die eben erwähnte einfache Überlegung besteht darin, daß das Teilchen nach dem Vorangehenden asymptotisch auf einer Geraden (die vom Mittelpunkt der anfänglichen Kreisbahn den Abstand a haben möge) mit einem endlichen Grenzimpuls

$$P_{\infty} \leq \frac{1}{2} E_0 / c \text{ ausläuft (S.546) und somit das}$$

Impulsmoment einem endlichen Grenzwert aP_{∞} zustreben muß. Es bietet Interesse, diesen Grenzwert etwas genauer zu analysieren. Denken wir uns das Teilchen ursprünglich auf einer Kreisbahn vom Radius R_0 mit nahezu Lichtgeschwindigkeit umlaufend, so darf angenommen werden, daß der Abstand der Grenzgeraden a vom Kreismittelpunkt, da die Ausstrahlung infolge der großen Beschleunigung außerordentlich schnell erfolgen muß, nicht wesentlich größer als R_0 sein wird; im Grenzfall der Lichtgeschwindigkeit (Limes $\beta_0 \rightarrow 1$) haben wir daher Limes $a \rightarrow R_0$ zu erwarten. Andererseits dürfen wir den Grenzwert des Impulses für diesen Grenzfall nach Abschn. 3 gleich $\frac{1}{2} E_0 / c$ annehmen. Wie weiter gezeigt wurde²³, besteht für die ungestörte Kreisbahn zwischen den Anfangsdaten J_0 , R_0 und μ_0 der einfache Zusammenhang $J_0 = c\mu_0 R_0$. Es ist also

$$\begin{aligned} J_{\infty} &= \lim_{t \rightarrow \infty, \beta_0 \rightarrow 1} J = \lim_{\beta_0 \rightarrow 1} a P_{\infty} \\ &= R_0 \cdot \frac{1}{2} \mu_0 c = \frac{1}{2} J_0. \end{aligned} \quad (37)$$

In Worten: Durch den im Grenzfall $\beta_0 \rightarrow 1$ gerichteten Ausstrahlungsprozeß wird dem anfänglich ungestörten Teilchen gerade die Hälfte seines Eigenimpulsmoments entzogen und in Feldenergie verwandelt. Möglicherweise wird dies auch dann noch mit einiger Annäherung zutreffen, wenn die anfängliche Mikrogeschwindigkeit des Teilchens von der Lichtgeschwindigkeit einigermaßen abweicht, da in diesem Falle a vergrößert und P_{∞} gleichzeitig verkleinert wird. Die naheliegende Deutung dieser Verhältnisse werden wir im folgenden Schlußabschnitt erörtern.

5. Ergebnis und Schlußbemerkungen

Die in den vorangehenden Abschnitten abgeleiteten Ergebnisse können folgendermaßen zusammengefaßt und mit bekannten physikalischen Vorstellungen und Erfahrungen in Zusammenhang gebracht werden:

²³ Vergl. 7, Gl. (94).

1. Das durch die dynamischen Gleichungen (4), (5) und (6) beschriebene physikalische System („Pol-Dipol-Teilchen“) führt — die Eindeutigkeit der asymptotischen Lösung vorausgesetzt — unter der Einwirkung der Strahlungskraft (1) die in Abschn. 2 durch Abb. 1 dargestellte Bewegung nach Art einer Spiralbahn aus, wobei sich die Bahnkurve für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch einer Geraden nähert. Hierbei wird sowohl Energie und Impuls als auch Impulsmoment abgestrahlt und an das mit dem Teilchen gekoppelte Strahlungsfeld abgegeben. Gleichzeitig nähert sich die Teilchengeschwindigkeit gemäß dem Exponentialgesetz (21) asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit, während die Ruhmasse μ des Teilchens abnimmt, aber nicht notwendig verschwindet.

2. Das geschilderte Verhalten zeigt in kinematischer Hinsicht eine gewisse Ähnlichkeit mit dem „Diracschen Paradoxon“ beim spinlosen Punktelektron, insofern auch hier die Geschwindigkeit des Teilchens asymptotisch *Lichtgeschwindigkeit* erreicht. Während aber bei Dirac die Energie des Systems mit wachsender Geschwindigkeit selbst unbegrenzt anwächst (und daher wegen der Erhaltungssätze für Teilchen und Feld aus dem Strahlungsfeld unbegrenzt nachgeliefert werden muß), ist das Anwachsen der Geschwindigkeit bei Pol-Dipol-Teilchen gerade die Bedingung für ein Endlichbleiben der Energie (Abschn. 2). Ein derartiges, von Dirac abweichendes natürlicheres Verhalten wird durch die „innere Struktur“ des Pol-Dipol-Teilchens ermöglicht, dessen Energie (und Eigenmasse) nach Ausweis des Impulsvektors (5) in komplizierterer Weise kinetisch bedingt ist. Andererseits wird die Schnelligkeit der Annäherung der Teilchengeschwindigkeit an die Lichtgeschwindigkeit gemäß (21) bei uns durch die mit dem Spinnmoment in Zusammenhang stehende Konstante \sqrt{x} , Gl. (11), und nicht wie bei Dirac in der paradoxen Weise durch die Konstante a [proportional μ , umgekehrt proportional e^2 , Gl. (13)] bestimmt.

3. Eine unvoreingenommene Betrachtung der beschriebenen Verhältnisse scheint nun die Annahme naheulegen, daß es sich bei dem dargestellten Vorgang nicht um die Beschreibung des Verhaltens des — erfahrungsgemäß *stabilen* — Elektrons, sondern um die korrespondenzmäßige klassische Beschreibung des spontanen *Zerfalls eines instabilen schweren Teilchens* handelt. So

weit unsere Erfahrung reicht, scheint es daher das Natürlichste, die klassisch beschriebene Instabilität mit dem Zerfall speziell des *Mesons* (vom *Spin* \hbar) in Zusammenhang zu bringen. Tatsächlich wird ja das beim Zerfall eines ruhenden Mesons entstehende Elektron wegen des extremen Massenverhältnisses von Meson und Elektron nahezu Lichtgeschwindigkeit erreichen, während das ungeladene Neutrino von entgegengesetzt gleichem Impuls mit Lichtgeschwindigkeit wegfliht. Diese Vorstellung wird vor allem auch dadurch gestützt, daß außer Energie und Impuls auch Impulsmoment an das das geladene Teilchen umgebende Feld abgegeben wird und daß der Betrag des vom Felde aufgenommenen Impulsmoments nach den Abschätzungen am Ende von Abschn. 4 für den den quantentheoretischen Verhältnissen am nächsten kommenden Grenzfall gerade gleich der *Hälfte* des ursprünglichen Impulsmomentes ist. Dies wäre in Übereinstimmung mit der aus den Erfahrungen des β -Zerfalls abgeleiteten Vorstellung des radioaktiven Zerfalls eines geladenen Mesons mit dem Spin \hbar in ein Elektron und ein Neutrino mit je dem Spin $1/2 \hbar$.

Es ist andererseits zu betonen, daß der beschriebene klassische Vorgang nicht in allen Zügen dem Zerfall eines Mesons entspricht. Der Ansatz der Strahlungskraft in der Form (1) entspricht der Wechselwirkung eines geladenen Teilchens mit dem Maxwell-Feld, nicht mit einem Neutrino-feld. Indessen darf erwartet werden, daß eine klassische Theorie des Neutrino-feldes einen zu (1) analogen Ausdruck liefern würde (an die Stelle der elektrischen Ladung hätte dabei die Neutrino-ladung zu treten), so daß die klassische Rechnung in großen Zügen dieselbe bliebe. Dagegen ist hervorzuheben, daß das klassische Bild nicht ebenso einfach auf den Zerfall eines *spinlosen* Mesons (Spin 0), das bei der Höhenstrahlung vermutlich die Hauptrolle spielt, übertragen werden kann, da einem spinlosen Teilchen vermutlich keine innere Rotationsbewegung zuge-

ordnet werden kann und daher keine Übergangstendenz (vermöge der Neutrino-Strahlungsdämpfung) vorhanden wäre. Andererseits ist es wiederum befriedigend, daß das Teilchen auch nach dem klassischen Bilde nicht ohne weiteres in einen Endzustand der Eigenmasse 0 übergeht, sondern in einen Zustand mit der Eigenmasse $\mu_\infty > 0$, so daß es auch schon klassisch verständlich ist, daß ein tiefer Zustand mit geringer Eigenmasse — das Elektron — existiert, welcher in strengem Sinne stabil ist²⁴.

Eine Lücke in unseren Ausführungen ist es ferner, daß sich wegen der Schwierigkeiten bei der Integration der dynamischen Grundgleichungen und wegen der mangelnden Verankerung dieser in einer universellen „Feldmechanik“ (welche die Theorie des Neutrino-feldes mitenthalten müßte) eine korrespondenzmäßige Abschätzung der Lebensdauer des Mesons (als Funktion des Massenverhältnisses Meson und Elektron) bisher nicht durchführen ließ.

4. Es ist schließlich hervorzuheben, daß die unseren Betrachtungen zugrunde gelegten dynamischen Bewegungsgleichungen (4), (5) und (6) nicht den einzig möglichen Ausgangspunkt für die theoretische Behandlung eines Teilchens mit Spin darstellen; es werden sich dem hier teilweise durchgerechneten Beispiel ähnliche Beispiele an die Seite stellen lassen. Immerhin dürfte das hier untersuchte physikalische System wohl den einfachsten Typus eines Modells für ein Teilchen mit Spin darstellen²⁵. Darüber hinaus ergibt sich die weitergehende Aufgabe, die Bewegungsgleichungen für Feldsingularitäten, wie sie sich im Rahmen einer allgemeinen Feldmechanik systematisch entwickeln lassen (Bopp), so vollständig als möglich durchzuarbeiten, um auf diesem Wege zu einer rein klassischen Mechanik der Elementarteilchen zu gelangen. Naturgemäß muß eine derartige klassische Theorie durch die Quantentheorie eine nachträgliche Überformung erfahren. Wenn aber das klassische Singularitäten-

über einerseits in Abschn. 3 gezeigt, daß die Selbstbeschleunigung des Teilchens bis zur Lichtgeschwindigkeit keineswegs $\mu_\infty = 0$ zur Folge hat; andererseits ist aber hervorzuheben, daß das Bopp'sche Modell des klassischen Teilchens sich mit dem unseren nicht genau deckt, da nach Bopp $\lambda = \text{const}$ und $m = m(s)$ anzunehmen wäre, während wir umgekehrt, was mit den Bewegungsgleichungen für das Pol-Dipol-Teilchen ebenso verträglich ist, $\lambda = \lambda(s)$ und $m = \text{const}$ vorausgesetzt haben.

²⁵ Wegen der Spezialisierung vgl. ^{11a}.

²⁴ Im Gegensatz hierzu hat Bopp (Z. Naturforschg. **2a**, 196 [1947], § 3) nachgewiesen, daß sich bei der Quantisierung der feldmechanischen Grundgleichungen ein Massenspektrum ergibt, welches (bei positiver Energie) eine Häufungsstelle bei der Energie 0 besitzt. Dem würde klassisch ein kontinuierliches Massenspektrum entsprechen, welches sich von positiven Massenwerten bis zur Energie 0 erstreckt, wie es die Selbstbeschleunigung des klassischen Teilchens bis zur Lichtgeschwindigkeit auf den ersten Blick tatsächlich zu fordern scheint. Wir haben demgegen-

problem der Physik, welches diesergestalt die Rolle des älteren „Problems der Materie“ (Mie) übernommen hat, angesichts der Quantentheorie überhaupt einen physikalischen Sinn haben soll, so kann dieser ja nur darin bestehen, daß sich zwischen der klassischen und quantenphysikalischen Auffassung des Problems der Elementarteilchen gewisse korrespondenzmäßige Parallelen herstellen lassen. In diesem Sinne mögen die vorstehenden Überlegungen zu der Hoffnung berech-

tigen, daß das Zu-Ende-Denken der Möglichkeiten der klassischen Physik doch auch auf das „in Wirklichkeit“ nur durch die Quantentheorie erfaßbare physikalische Geschehen ein gewisses Licht wirft. Das zunächst erreichbare Ziel aber dürfte wohl in der Einsicht bestehen, daß auch den zunächst fremdartig erscheinenden Zügen der klassischen Theorie — wie dem Diracschen Paradoxon — bei entsprechender Auffassung ein verständlicher physikalischer Sinn innewohnt.

Spektroskopische Bestimmung von Bindungsmomenten

Von HANS KEMPTER und REINHARD MECKE

Aus dem Institut für physikalische Chemie der Universität Freiburg i. Brg.

(Z. Naturforschg. 2a, 549–556 [1947]; eingegangen am 2. Dezember 1946)

Nach einem Verfahren, das bereits in früheren Arbeiten erwähnt wurde, werden durch ultrarote Absorptionsmessungen absolute C—H-Bindungsmomente gemessen. Aus Benzolderivaten (Benzol, Toluol, Phenol, *p*-Dibrombenzol) ergibt sich für das C_{ar} —H-Moment einheitlich der Wert $0,24 \cdot 10^{-18}$, für das C_{al} —H-Moment bei Toluol 0,68, bei Chloroform 0,52 und bei Trichloräthylen $0,30 \cdot 10^{-18}$. Das Moment ist dem der C—Cl-Bindung ($1,33 \cdot 10^{-18}$) entgegengesetzt gerichtet. Der Verlauf des Momentes als Funktion des Kernabstandes läßt sich durch eine einfache Morsesche Exponentialfunktion $\mu_0 e^{-a(r-r_0)}$ gut darstellen.

Zu den konstitutionellen Größen eines Moleküls gehört sein Dipolmoment. Über die Molpolarisation der direkten Messung zugänglich, setzt es sich bei mehratomigen Molekülen unter der Annahme starrer Bindungen vektoriell aus den Partialmomenten der einzelnen Valenzen oder Atomgruppen, den sogen. „Bindungsmomenten“, zusammen. Die Kenntnis dieser Bindungsmomente gestattet somit einen Einblick in die Ladungsverteilung und gegenseitige Anordnung der Bindungen innerhalb einer Molekel. Ihre Ermittlung aus dem Gesamtmoment ist bei Molekülen, deren geometrische Struktur anderweitig bekannt ist, grundsätzlich möglich. Die Methode, deren man sich hierbei bedient, ist die der sukzessiven Substitution einzelner Bindungen oder Atomgruppen durch andere und Isolierung des gesuchten Momentes durch Differenzbildung. Wegen der relativ großen Empfindlichkeit des Bindungsmomentes gegen Störung durch Nachbaratome¹ ist dieses Verfahren allerdings nur in solchen Fällen an-

wendbar, wo die gegenseitige Beeinflussung als vernachlässigbar klein angenommen werden kann, oder wo ihre Größe bekannt ist. Auch liefert es nur Differenzen von Bindungsmomenten. Bei der Bearbeitung konstitutioneller Bindungsfragen mit Hilfe der Molpolarisation setzt man daher das Moment C_{ar} —H des Benzols (ar = aromatisch) willkürlich gleich Null und bezieht sämtliche anderen Momente auf diesen Standardwert, ausgehend von der Überlegung, daß bei aromatischen Verbindungen bezüglich der gegenseitigen Störung noch die geringsten Bedenken bestehen, d. h. daß man hier wegen des relativ großen Abstandes der einzelnen Atomgruppen voneinander noch mit einigermaßen festen Werten rechnen kann.

Es ist nun häufig die Meinung vertreten, daß es außer dieser hier angedeuteten Methode der Bestimmung der *Relativ*-Werte von Einzelmomenten grundsätzlich unmöglich sei, auf empirischem Wege ihre *absolute* Größe zu messen^{1,2}. Aber bereits 1935³ und in der Folge^{4,5} wurde von uns

¹ Siehe A. Eucken, Lehrbuch d. chem. Physik, Bd. 1, 1938.

² H. M. Smallwood, Z. physik. Chemie, Abt. B, 19, 242 [1932].

³ B. Timm u. R. Mecke, Z. Physik 98, 363 [1935].

⁴ R. Mecke, Z. physik. Chem., Abt. B, 33, 156 [1936].

⁵ R. Mecke, Z. Physik 107, 595 [1937].